Universidade do Minho
Escola de Ciências

Alexandra Isabel Lima de Amaral Ferraz

O Problema de Lucas, um problema clássico de Análise Combinatória

outubro de 2017

UMinho | 2017 Alexandra Isabel Lima de Amaral Ferraz **O Problema de Lucas, um problema clássico de Análise Combinatória**

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Alexandra Isabel Lima de Amaral Ferraz

O Problema de Lucas, um problema clássico de Análise Combinatória

Dissertação de Mestrado
Mestrado em Ciências - Formação Contínua de Professores
Área de Especialização em Matemática

Trabalho realizado sob orientação da
Professora Doutora Ana Jacinta Soares

outubro de 2017

DECLARAÇÃO

Nome: Alexandra Isabel Lima de Amaral Ferraz
Endereço eletrónico: cxaferraz@gmail.com
Telefone: 966181799
Número do Bilhete de Identidade: 10531784

Título da dissertação – O Problema de Lucas, um problema clássico de Análise Combinatória

Orientadora: Professora Doutora Ana Jacinta Soares

Ano de conclusão: 2017

Designação do Mestrado: Mestrado em Ciências - Formação Contínua de Professores
Área de especialização em Matemática

Universidade do Minho, 30/10/2017

Assinatura: ______________________________

O Problema de Lucas, um problema clássico de Análise Combinatória

Alexandra Isabel Lima de Amaral Ferraz

outubro 2017

Resumo

Nesta tese estudamos um problema clássico de combinatória, conhecido por "Problema de Lucas", que consiste na contagem do número de formas que se obtém ao sentar um determinado número de casais em torno de uma mesa redonda, alternando homens e mulheres, de tal modo que nenhum elemento de cada casal fique sentado ao lado do seu par. A tese apresenta uma solução do problema, essencialmente baseada nos lemas de Kaplansky, explorando as diversas etapas da sua resolução, suportadas nos fundamentos matemáticos apresentados preliminarmente.
Este trabalho inclui um conjunto de exercícios relacionados com o Problema de Lucas e com alguns dos resultados fulcrais abordados ao longo da tese. Estes exercícios foram pensados para trabalhar em sala de aula com alunos do 12º ano do ensino secundário, com o objetivo de enriquecer e complementar o programa de matemática relativo ao tema de combinatória.

Abstract

In this work we study a classic combinatorial problem, known as "Lucas Problem", which consists in counting the number of forms obtained by seating a certain number of couples around a round table, alternating men and women, so that none of the elements of each couple seats next to its pair. The thesis presents a solution to the problem, essentially based on the Kaplansky lemmas, exploring the several stages of its resolution, supported by the mathematical fundamentals preliminarily presented.

This work includes a set of exercises related both to the Lucas Problem and to some of the key results addressed throughout the thesis. These exercises were designed to be worked in the classroom with students from the 12th grade, with the aim of enriching and complementing the mathematics program for what concerns the combinatorial topic.

Conteúdo

Introdução Geral

A combinatória é um ramo da matemática que se dedica às técnicas de contagem de objetos em conjuntos ou configurações contendo um número finito de elementos com certas características. O presente trabalho foi pensado para um tipo de contagem especial: a do chamado Problema de Lucas (Problème des Ménages).

O Problema de Lucas é um problema clássico, tendo aparecido, muito possivelmente, pela primeira vez em 1891 por Édouard Lucas (1842 - 1891), que colocou o problema na sua publicação Théorie des Nombres [8]. Também conhecido como o Problema dos casais, este problema procura o número de formas de organizar n casais em torno de uma mesa circular, de forma que homens e mulheres fiquem sentados alternadamente, sem que nenhum homem fique sentado junto da sua mulher.

Embora aparentemente simples, foi um problema que, durante muitos anos, teve uma solução, mas não uma demonstração completa. A sua solução está dividida em várias etapas, e, algumas carecem de demonstração. Ao longo deste trabalho, irá explicar-se o Problema de Lucas e explanar a sua solução.

Os conteúdos de 12º ano sobre combinatória são os que suscitam maior volume de dúvidas, tanto por parte dos alunos como de professores, nomeadamente no que diz respeito à repetição ou reposição de elementos ou à disposição circular dos mesmos. Assim sendo, acredito que os exercícios de aplicação dos teoremas e lemas base deste trabalho, apresentados no último capítulo, sejam uma mais valia, no que concerne a compreensão dos conteúdos programáticos por parte dos alunos e a motivação dos mesmos para o estudo da combinatória.

Estrutura e organização da tese

Depois desta Introdução Geral, que visa enquadrar o trabalho e apresentar o tema abordado nesta monografia, o conteúdo da tese foi estruturado em cinco capítulos.

As notas históricas e registos biográficos perfazem o conteúdo do primeiro capítulo, de forma a contextualizar, cronológica e historicamente, o problema central apresentado nesta tese.

No segundo capítulo propomo-nos introduzir as noções preliminares e os fundamentos matemáticos que fornecem o suporte teórico aos capítulos seguintes.

O terceiro capítulo é de extrema relevância, pois fornece a base teórica de uma etapa fulcral na construção da solução apresentada nesta tese para o Problema de Lucas.

É no quarto capítulo da tese que se enuncia o problema e se constrói a sua solução, recorrendo para tal a toda a fundamentação teórica exposta nos capítulos anteriores e usando de forma crucial os lemas apresentados no capítulo anterior.

O derradeiro capítulo desta tese consiste num conjunto de exercícios relacionados com o Problema de Lucas, visando a sua apresentação a alunos do ensino secundário.

Capítulo 1

Notas históricas e registos biográficos

O *Problema de Lucas* é um problema que conta o número de formas de sentar um determinado número de casais em torno de uma mesa redonda, alternando homens e mulheres, de tal modo que nenhum homem fique sentado ao lado da sua mulher. Este problema foi formulado em 1891 por Édouard Lucas [8] e é uma extensão do *"Problème des rencontres"*, um problema clássico que consiste em determinar o número de permutações de n elementos distintos numerados de 1 a n, tal que o k-ésimo elemento não se encontra na k-ésima posição, com $k = 1, \ldots, n$. A sua formulação original teve origem em Piérre de Montmort (1678 - 1719). Numa primeira edição da sua obra, "Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard", [10], Montmort referia existirem n bolas numa urna, numeradas de 1 a n, da qual se retirava uma bola de cada vez; se à i-ésima vez fosse retirada a bola i, com $i = 1, 2, \ldots$, então havia um "encontro", sendo que o que se pretendia saber era qual o número de formas de não existirem "encontros" após terem sido retiradas todas as bolas.
Supondo que se tem um baralho de n cartas, numeradas de 1 a n, das quais, depois de baralhadas, se vão retirando uma a uma, sem reposição, contando alto à medida que vai sendo retirada cada carta: "1, 2, 3,. . . ", pretende-se saber de quantas formas não existirá um "encontro", isto é, de quantas formas se pode retirar cada carta sem que o seu número seja o que é "chamado"?

Na versão de Montmort, o baralho tinha 13 cartas, sendo por isso apelidado de "Treize". Montmort discutiu este problema com Nicholas Bernoulli (1687 – 1759), de 1710 a 1712, através de cartas, que estão incluídas na segunda edição da sua obra, "Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard", [11], em 1713. Nesta segunda edição, Montmort generaliza o trabalho para um baralho de n cartas. Uma vez mais, as n cartas vão sendo retiradas uma a uma do baralho, para procurar o número de configurações nas quais não existirá um "encontro", isto é, procura-se o número de formas de retirar cada uma das n cartas sem que o seu número seja o "chamado"; Montmort e Bernoulli encontram a fórmula.

Muitas tentativas de resolução foram sendo apresentadas para o *Problema de Lucas*, mas nenhuma delas fornecia uma solução explícita do problema.

A primeira solução com uma fórmula explícita foi publicada por Jacques Touchard (1885 - 1968) em 1934, apesar de não ter sido fornecida qualquer prova [15]. Em 1943, Irving Kaplansky (1917 - 2006) conseguiu demonstrar a fórmula fornecida por Touchard [5]. A demonstração de Kaplansky é simples, mas não imediata.

Sendo Édouard Lucas e Irving Kaplansky dois matemáticos essenciais a esta tese, irá destacar-se um pouco as suas biografias.

Os registos biográficos aqui apresentados baseiam-se essencialmente em diversas fontes incluidas na bibliografia, [4], [16] - [22].

Édouard Lucas

Nascimento: 4 de abril de 1842, Amiens, França
Falecimento: 3 de outubro de 1891, Paris, França

O matemático francês François Édouard Anatole Lucas nasceu e estudou em Amiens na École Normale Supérieure. Teve o seu primeiro emprego como assistente do astrónomo Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811 - 1877) no Observatório de Paris. Depois de ter servido na guerra Franco-Prussiana (1870 - 1871) como oficial de artilharia, e após a derrota francesa, Lucas foi nomeado professor no liceu "Saint Louis"e posteriormente no "Liceu Charlemagne", ambos em Paris. Era conhecido como sendo um professor que motivava os alunos, divertindo-os e desafiando-os com puzzles matemáticos, os quais requeriam conhecimentos matemáticos consideráveis para serem resolvidos.

Nos estudos de Lucas, destacam-se os trabalhos em Teoria dos Números; ele estudou a *sequência de Fibonacci*, $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$, com o primeiro termo igual a zero, $f_0 = 0$, na qual cada termo a partir do terceiro é a soma dos dois anteriores, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Lucas encontrou uma fórmula explícita para a obtenção dos *números de Fibonacci*:

$$\sqrt{5} f_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Lucas explorou as propriedades da sequência de números $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29,$

$47, 76, 123, \ldots$, que hoje são chamados de *números de Lucas*.

Existem muitas identidades entre as sequências de Lucas e de Fibonacci [4]. Olhando para algumas dessas identidades, e considerando L_n e F_n, com $n = 0, 1, 2, \ldots$, os termos das sequências de Lucas e de Fibonacci, respetivamente, então, para todos os inteiros não negativos n, teremos

- $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$
- $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$
- $F_n L_n = F_{2n}$

Lucas também ficou conhecido por ter concebido um teste de verificação de números primos para os *números de Mersenne*. Estes números têm o nome do padre francês Marin Mersenne (1588 – 1648) e são da forma $2^p - 1$ onde p é primo. Lucas provou o seguinte teorema:

> *O número de Mersenne $M_p = 2^p - 1$, em que p é um primo maior que 2, é ele próprio primo se e só se M_p divide S_p, onde S_p é gerado por $S_2 = 4$ e $S_n = (S_{n-1})^2 - 2$, com $n \geq 2$.*

Usando este teorema, em 1876 Lucas conseguiu demonstrar que o número $2^{127} - 1$ é primo, sendo o primeiro primo a ser descoberto em mais de um século e o maior número primo descoberto sem ajuda tecnológica [17]. Passariam mais de três quartos de século até um primo maior ser descoberto [17]!

O seu teste a números primos foi melhorado por Derrick Lehmer (1905 - 1991) e é hoje conhecido como teste de Lucas-Lehmer [17].

Lucas também tinha um enorme interesse em Matemática Recreativa e foi o inventor do puzzle matemático ou "quebra cabeças" denominado "Torre de Hanói". Quando Lucas lançou este puzzle, em 1883, fê-lo com o nome N. Claus de Siam, que é um anagrama para Lucas d'Amiens [21]; este puzzle foi também apresentado na famosa obra de quatro volumes sobre Matemática recreativa de Lucas, *Récréations Mathématiques* [9]. A Torre de Hanói consiste numa base com três pinos, num dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, por ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um disco de cada vez, de maneira que um disco de diâmetro maior nunca fique em cima de outro de diâmetro menor em nenhuma situação. O número de discos pode variar sendo que o mais simples contém apenas três. A Torre de Hanói tem sido tradicionalmente considerada como um procedimento para avaliação do planeamento e solução de problemas [16].

A morte de Lucas deveu-se a um trágico e bizarro acidente no banquete anual da "Association française pour l'advancement des sciences", devido a um estilhaço proveniente da quebra de um prato que o atingiu na face; o ferimento infetou, tendo provocado a morte do matemático, com apenas 49 anos.

Irving Kaplansky

Nascimento: 22 de março de 1917,
Toronto, Canadá
Falecimento: 22 de junho de 2006,
Los Angeles, EUA

Kaplansky nasceu em Toronto, pouco tempo após os seus pais terem emigrado da Polónia para o Canadá. Aos 4 anos começou a ter lições de piano, que adorava, mas 11 anos depois, percebeu que nunca iria ser um pianista de prestígio, continuando, contudo, a tocar piano. Estudou na Universidade de Toronto até 1939, sendo que, no ano em que foi finalista (1938 - 1939), em 1938, participou na competição matemática "William Lowell Putnam Mathematical Competition", com mais dois elementos da sua Universidade. Esta foi a primeira edição da competição para estudantes canadianos e norte-americanos, edição ganha pela equipa de Kaplansky (Universidade de Toronto). Kaplansky foi um dos cinco estudantes com melhor pontuação individual da competição, pelo que também lhe foi atribuído o título de "Putnam Fellow", tendo recebido por isso uma bolsa para a Universidade de Harvard. Prosseguiu assim os estudos na Universidade de Harvard, onde concluiu o doutoramento em 1941, um ano após se ter tornado cidadão norte americano, com a tese *Maximal Fields with Valuations*, tendo permanecido, desde esse ano, professor em Harvard até 1944.

Em 1943, Kaplansky demonstrou num seu trabalho [5], a elegante fórmula explícita que solucionava o *Problema de Lucas*, fornecida por Touchard [5] em 1934.

De 1944 a 1945, Kaplansky pertenceu ao grupo de Matemática Aplicada do Conselho Nacional de Defesa, na Universidade de Colômbia, até se mudar para a Universidade de Chicago, onde foi professor de matemática até 1984 e permaneceu até à sua reforma nesse ano. De 1962 até 1967, Kaplansky foi Diretor do Departamento de Matemática.

Kaplansky foi ainda o Diretor do Instituto de Investigação de Ciências Matemáticas, de 1984 a 1992, e Presidente da Sociedade Americana de Matemática, de 1985 a 1986.

Publicou mais de 150 artigos e mais de 20 livros matemáticos; foi orientador de 55 alunos de doutoramento.

Irving Kaplansky trabalhou num vasto leque de áreas matemáticas, embora maioritariamente na Álgebra. Teve contribuições em combinatória, na teoria dos anéis e em teoria dos grupos.

Capítulo 2

Noções Preliminares de combinatória

Existem problemas de contagem muito simples e problemas de contagem bastante complexos, mas seja qual for o grau de complexidade, é constante a sua utilização no nosso dia-a-dia. A combinatória fornece uma série de instrumentos devidamente formalizados que são muito úteis na abordagem de tais problemas, sobretudo nos mais complexos. De seguida, neste segundo capítulo, serão apresentadas algumas noções básicas de combinatória, que serão úteis para a resolução do problema central desta tese – o *Problema de Lucas.*

2.1 Dois princípios básicos de contagem

Começa-se por introduzir dois princípios básicos muito utilizados em processos de contagem [12]. São eles o *princípio da adição* e o *princípio da multiplicação.* Cada um destes princípios pode ser utilizado para contar o número de ocorrências de um determinado evento, ou de uma sequência de eventos, ou de outro tipo de combinações de eventos independentes.

Proposição 2.1.1 (Princípio da Adição). *Consideremos um conjunto E dividido em n subconjuntos disjuntos (partições), digamos $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ seja k_i o número de elementos do subconjunto E_i.*

Então, o número de elementos de E é a soma dos elementos que constituem cada uma das suas partições, isto é, $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Exemplo 2.1.1. *Para escolher onde jantar, a Carolina tem, perto de si, dois restaurantes de comida chinesa, cinco de comida portuguesa e três de comida italiana. Então, a Carolina pode optar por $2 + 5 + 3 = 10$ restaurantes.*

Proposição 2.1.2 (Princípio da Multiplicação). *Consideremos um acontecimento E realizado em n etapas consecutivas independentes, digamos E_1, E_2, …, E_n. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, seja k_i o número de maneiras distintas de realizar a etapa E_i. Então, o acontecimento E pode ser realizado de $k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_n$ maneiras distintas.*

Exemplo 2.1.2. *Quantos números de três algarismos podemos formar? Ora, o primeiro algarismo pode ser qualquer um com exceção do zero e os dois algarismos seguintes podem ser quaisquer entre 0 e 9. Assim, temos 9 possibilidades para o primeiro e 10 possibilidades para cada um dos seguintes, pelo que teremos $9 \times 10 \times 10 = 900$ números com três algarismos.*

2.2 Tópicos de combinatória

De seguida, serão introduzidas as definições mais elementares de combinatória relacionadas com configurações distintas de elementos. Serão também apresentadas e justificadas as fórmulas de contagem destas configurações. Consideraremos apenas elementos todos distintos. Começamos com o caso em que os elementos não são reutilizados e passamos depois ao caso em que podem ser reutilizados.

2.2.1 Elementos distintos e não reutilizados

Consideremos n elementos distintos. Vão definir-se alguns tipos de configurações obtidas a partir deste elementos e, para cada tipo introduzido, responder à pergunta central "quantas há?".

Definição 2.2.1 (Permutação). *Uma permutação de tamanho n é um conjunto de n elementos totalmente ordenado.*

• Quantas permutações distintas podemos então formar?

Ora, o primeiro elemento da permutação pode ser qualquer um dos n elementos dados, havendo, assim, n opções para ele. O segundo elemento pode ser um qualquer dos $n-1$ restantes. O terceiro pode ser um qualquer dos $n-2$ restantes. E assim sucessivamente, até que para o n-ésimo elemento teremos apenas uma opção. Pelo princípio da multiplicação, Proposição 2.1.2, o número de permutações distintas é dado por $n(n-1)(n-2)\cdots 1$, ou seja por $n!$. Escrevemos

$$P_n = n!, \tag{2.1}$$

onde P_n indica precisamente o número de permutações de n elementos distintos (não reutilizados).

Exemplo 2.2.1. *Quantas sequências totalmente ordenadas com as cores azul (A), branco (B), cinza (C) e dourado (D) podemos formar?*

A resposta será dada por $P_4 = 4! = 24$ permutações.

Estas permutações são as seguintes:

$$\begin{array}{llllll} ABCD, & ABDC, & ACBD, & ACDB, & ADBC, & ADCB, \\ BACD, & BADC, & BCAD, & BCDA, & BDAC, & BDCA, \\ CABD, & CADB, & CBAD, & CBDA, & CDAB, & CDBA, \\ DABC, & DACB, & DBAC, & DBCA, & DCAB, & DCBA. \end{array}$$

Definição 2.2.2 (Arranjo). *Um arranjo de tamanho k formado a partir dos n elementos dados, com $k \leq n$, ou ainda um arranjo dos n elementos dados tomados k a k, com $k \leq n$, é uma sequência totalmente ordenada de k elementos escolhidos a partir dos n dados.*

• Quantos arranjos distintos de tamanho k podemos formar?

Ora, o primeiro elemento pode ser qualquer um dos n existentes, havendo assim, n opções para ele. Analogamente, teremos $n-1$ opções para o segundo elemento, $n-2$ para o terceiro, e assim por diante, até $n-(k-1)$ para o k-ésimo elemento. Pelo princípio da multiplicação, Proposição 2.1.2, concluímos que o número pretendido é dado por $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$. Escrevemos

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}\,, \tag{2.2}$$

onde A_k^n indica o número de arranjos de n elementos distintos e não reutilizados tomados k a k.

Exemplo 2.2.2. *Dispondo dos algarismos 1, 2, 3 e 4 e pretendendo formar códigos numéricos de dois algarismos distintos, contamos os arranjos de* 4 *elementos tomados* 2 *a* 2*. Há, portanto,* $A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ *códigos diferentes. São eles:*

12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43

Definição 2.2.3 (Combinação). *Uma combinação de tamanho k formada a partir dos n elementos dados, com $k \leq n$, ou ainda uma combinação dos n elementos dados tomados k a k, com $k \leq n$, é uma sequência não ordenada de k elementos escolhidos a partir dos n dados.*

É imediato que uma combinação é idêntica a um arranjo, com a particularidade de não se tomar em conta a ordenação dos elementos.

• Quantas combinações distintas de tamanho k podemos formar?

Ora, cada sequência não ordenada de k elementos, ou seja, cada combinação de tamanho k, dá origem a $k!$ arranjos distintos de k elementos. Assim, o número de combinações de k elementos será igual ao número de arranjos de k elementos, retirando-lhe os casos em que, embora a ordenação seja distinta, os elementos escolhidos são os mesmos. Estes casos são precisamente $k!$, correspondendo às permutações de k elementos. Logo, concluímos que o número de combinações de k elementos é dado por $A_k^n/k!$. Escrevemos

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{ou} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{2.3}$$

onde C_k^n indica o número de combinações de n elementos distintos e não reutilizados tomados k a k. É imediato que se tem

$$C_k^n = C_{n-k}^n\,. \tag{2.4}$$

Exemplo 2.2.3. *O Alexandre combinou encontrar-se num restaurante com oito amigos, e, à chegada, todos se cumprimentaram entre eles com um único aperto de mão. Quantos foram os apertos de mão entre todos os amigos?*

Tendo em conta que o Alexandre tinha oito amigos, ao todo seriam nove as pessoas que se cumprimentaram entre si, sendo que cada cumprimento envolve duas pessoas.

Vamos considerar o conjunto S destas nove pessoas, e contar o número de subconjuntos com dois elementos que podemos formar a partir dos elementos do conjunto S. Dito de outra forma, vamos contar as combinações de dois elementos formadas a partir dos elementos de S. Assim, o número de cumprimentos será dado por

$$C_2^9 = \frac{9!}{2!\,(9-2)!} = 36 \ .$$

2.2.2 Elementos distintos possivelmente reutilizados

Consideremos n elementos distintos. Irão considerar-se agora alguns tipos de configurações obtidas a partir destes elementos, admitindo que cada um deles pode ser reutilizado. Para cada tipo de configuração considerado, pretendemos responder à pergunta central "quantas configurações há?".

Permutação: Quantas permutações distintas podemos então formar, admitindo a possibilidade de reutilização de elementos?

Para primeiro elemento da permutação, podemos escolher qualquer um dos n elementos dados. Para o segundo elemento podemos escolher, igualmente, qualquer um dos n elementos dados, devido à possibilidade de reutilização de elementos; de forma análoga, e até ao n-ésimo elemento, teremos n opções de escolha para cada um. Pelo princípio da multiplicação, Proposição 2.1.2, o número de permutações distintas é dado por $n \times n \times \ldots \times n = n^n$. Escrevemos

$$\overline{P}^{\,n} = n^n \,, \tag{2.5}$$

onde $\overline{P}^{\,n}$ indica o número de permutações de n elementos distintos podendo reutilizar cada um deles.

Exemplo 2.2.4. *Uma empresa realizou um inquérito de satisfação ao cliente, constituído por três questões. Para cada questão, cada cliente inquirido deveria assinalar uma e uma só de três opções: não satisfeito (N), satisfeito (S) ou bastante satisfeito (B). Quantas sequências de três respostas distintas pode cada inquirido apresentar?*

Sendo o inquérito constituído por uma sequência de três respostas e sabendo que cada elemento dessa sequência pode ser N, S ou B, trata-se de contar o número de permutações de 3 *elementos distintos podendo reutilizar cada um deles. Temos, portanto,* $\overline{P}_3 = 3^3$ *sequências distintas de três respostas.*

Arranjo: Quantos arranjos distintos de tamanho k podemos formar, podendo reutilizar os elementos?

Uma vez que é possível reutilizar cada um dos elementos, teremos n escolhas possíveis para cada uma das k posições. Pelo princípio da multiplicação, Proposição 2.1.2, o número de arranjos é então dado por $\underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{k \text{ vezes}} = n^k$. Escrevemos

$$\overline{A}^{\,n}_{k} = n^k\,, \tag{2.6}$$

onde $\overline{A}^{\,n}_{k}$ indica o número de arranjos de tamanho k formados a partir de n elementos distintos, podendo reutilizar cada um deles.

Exemplo 2.2.5. *A Carolina comprou um telemóvel e pretende introduzir um código de segurança constituído por uma sequência de quatro algarismos. Quantas possibilidades distintas possui a Carolina para a escolha do código?*

Sendo o código constituído por uma sequência de quatro algarismos e tendo em conta que cada elemento da sequência pode ser um qualquer dos dez algarismos 0,1,...,9, trata-se de contar os arranjos de 4 elementos, podendo repetir, formados a partir de 10 elementos distintos. Temos então $A^{10}_{4} = 10^4$ *possibilidades distintas de escolher o código.*

Combinação Quantas combinações distintas de tamanho k, com possível reutilização de elementos podemos formar?

Vamos mostrar que podemos reduzir a contagem destas combinações à contagem de certas combinações simples (sem repetição de elementos).

Para tal, comecemos por designar os n elementos distintos à nossa disposição por $1, 2, \ldots, n$, e mostremos que cada combinação de k elementos formada a partir do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ com possível repetição pode ser associada, de forma bijetiva, a uma combinação simples de k elementos formada a partir do conjunto $\{1, 2, \ldots, n, \ldots, n + k - 1\}$.

Dada uma combinação do primeiro tipo (com possível repetição), suponhamos que os seus elementos estão dispostos por ordem não decrescente (notemos que, sendo a ordem irrelevante numa combinação, qualquer outra ordenação dos elementos não produz uma combinação diferente). Suponhamos agora que somamos 0 ao primeiro elemento da combinação, 1 ao segundo, 2 ao terceiro, e assim sucessivamente, até que somamos $k-1$ ao k-ésimo elemento. Vamos obter uma nova combinação com o mesmo tamanho, k, mas com os elementos todos distintos, dispostos por ordem estritamente crescente, na qual cada elemento pode ser um qualquer do conjunto $\{1, 2, \ldots, n + k - 1\}$.

Reciprocamente, a cada combinação simples de tamanho k formada a partir do conjunto $\{1, 2, \ldots, n + k - 1\}$, podemos associar, por subtração, uma combinação de tamanho k, com eventual repetição de elementos, formada a partir do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Assim, mostrámos que o número de combinações de tamanho k, com possível reutilização de elementos, formadas a partir de n elementos distintos pode ser dado por $C_k^{n+k-1} = \binom{n+k-1}{k}$. Escrevemos

$$\overline{C}_k^n = C_k^{n+k-1} \tag{2.7}$$

onde $\overline{C}_k^n$ indica o número de combinações de tamanho k formados a partir de n elementos distintos, podendo reutilizar cada um deles.

Exemplo 2.2.6. *A Carolina pretende escolher três bolas para o seu gelado, de entre os seguintes sabores: Chocolate (C), Morango (M), Baunilha (B), Limão (L) e Doce de leite (D). Uma vez que os três sabores podem ser iguais ou diferentes, e que não interessa a ordem pela qual escolhemos os sabores, trata-se claramente de contar as combinações de* 3 *elementos, com possibilidade de reutilização dos mesmos, formadas a partir de* 5 *elementos distintos. Então o número de gelados diferentes que a Carolina pode escolher é dado por*

$$\overline{C}\,^{5}_{3} = C^{7}_{3} = 35 \ .$$

A terminar esta secção, vamos resumir na Tabela (2.1) as fórmulas de contagem das diferentes configurações aqui consideradas. Esta tabela permitirá que todas elas sejam visualizadas de forma esquemática e clara.

	Sem reutilização	Podendo reutilizar
Permutações	$P_n = n!$	$\overline{P}_n = n^n$
Arranjos	$A^n_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\overline{A}_n = n^k$
Combinações	$C\,^n_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$\overline{C}\,^n_k = C\,^{n+k-1}_k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Tabela 2.1: Fórmulas de contagem para as diferentes configurações tratadas na Secção 2.2.

2.3 Teorema binomial de Newton

O objetivo desta secção é apresentar a bem conhecida fórmula do binómio de Newton, amplamente explorada no ensino secundário, e muito utilizada em problemas de combinatória. Com ela estão relacionados o famoso *triângulo de Pascal* bem como os *coeficientes binomiais*.

Teorema 2.3.1 (Regra de Pascal)**.** *Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq k \leq n$. Então é válida a identidade estabelecida pela chamada **Regra de Pascal**,*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{2.8}$$

De seguida, serão apresentadas duas demonstrações da Regra de Pascal expressa na fórmula (2.8). A primeira é uma demonstração algébrica, baseada na definição de combinação, que usa manipulações simples. A segunda é uma demonstração combinatória, que explora a noção de combinação, tornando-se, a meu ver, mais leve e de compreensão simples.

Versão algébrica da demonstração.
Da expressão (2.3) que nos dá o número de combinações, efetuando manipulações algébricas simples, podemos escrever sucessivamente:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k},
\end{aligned}$$

ficando demonstrada a Regra de Pascal estabelecida na fórmula (2.8). □

Versão combinatória da demonstração.
Consideremos um conjunto X de n elementos distintos e suponhamos que pretendemos formar um subconjunto de X com k elementos. Um tal sub-

conjunto de X mais não é do que uma combinação de tamanho k formada a partir dos elementos de X, conforme a definição 2.2.3. É então óbvio que este subconjunto pode ser formado de $\binom{n}{k}$ maneiras distintas.

Por outro lado, se privilegiarmos um determinado elemento a de X, ao contarmos o número de subconjuntos de X que podem ser formados com k elementos, podemos distinguir dois casos: ou o elemento a integra o subconjunto a formar ou o elemento a não integra esse subconjunto. No primeiro caso, uma vez que a já está selecionado, resta-nos escolher apenas $k-1$ elementos dos restantes $n-1$ elementos disponíveis em X, o que podemos fazer de

$$\binom{n-1}{k-1}$$

formas distintas.

No segundo caso, como a não integra o subconjunto a formar, devemos escolher a totalidade dos k elementos a selecionar de entre os $n-1$ elementos disponíveis em X, o que podemos fazer de

$$\binom{n-1}{k}$$

formas distintas.

Consequentemente, pelo princípio da adição, Teorema 2.1.1, concluímos que há

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

subconjuntos distintos. Pelo exposto, resulta de imediato a validade da fórmula (2.8), ficando completa a demonstração da Regra de Pascal. $\square$

Teorema 2.3.2 (Binómio de Newton). *Sejam* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *e* $n, k \in \mathbb{N}_0$ *tais que* $k \leq n$. *Então o polinómio* $(x_1 + x_2)^n$ *pode ser escrito através da fórmula* *do binómio de Newton como*

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {x_1}^k {x_2}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {x_2}^k {x_1}^{n-k}, \tag{2.9}$$

onde os coeficientes $\binom{n}{k}$ *são os chamados coeficientes binomiais.*

Demonstração. Tomemos a primeira igualdade em (2.9),

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {x_1}^k {x_2}^{n-k} \ .$$

A sua demonstração irá ser feita por indução sobre n.

- *Passo base ($n = 1$).* A igualdade considerada dá lugar a

$$(x_1 + x_2)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} {x_1}^k {x_2}^{1-k}$$

ou seja, sucessivamente a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \binom{1}{0} {x_1}^0 {x_2}^{1-0} + \binom{1}{1} {x_1}^1 {x_2}^{1-1} \\ &= x_2 + x_1 \end{aligned}$$

o que, obviamente, é verdade.

- *Passo indutivo.* Admitamos, por hipótese de indução, que

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {x_1}^k {x_2}^{n-k}$$

e pretendemos provar que

$$(x_1 + x_2)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} {x_1}^k {x_2}^{n+1-k} \ .$$

Atendendo a que

$$(x_1 + x_2)^{n+1} = (x_1 + x_2)(x_1 + x_2)^n \tag{2.10}$$

e usando a hipótese de indução, temos que

$$(x_1 + x_2)^{n+1} = (x_1 + x_2) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {x_1}^k {x_2}^{n-k}$$

ou seja, que

$$(x_1 + x_2)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {x_1}^{k+1} {x_2}^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {x_1}^k {x_2}^{n+1-k} \ . \tag{2.11}$$

A primeira parcela no segundo membro de (2.11) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {x_1}^{k+1} {x_2}^{n-k} &= \binom{n}{n} {x_1}^{n+1} {x_2}^0 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} {x_1}^{k+1} {x_2}^{n-k} \\
&= {x_1}^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} {x_1}^{k+1} {x_2}^{n-k} \\
&= {x_1}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} {x_1}^{k} {x_2}^{n+1-k} \ .
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Por outro lado, a segunda parcela no segundo membro de (2.11) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {x_1}^{k} {x_2}^{n+1-k} &= \binom{n}{0} {x_1}^{0} {x_2}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} {x_1}^{k} {x_2}^{n+1-k} \\
&= {x_2}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} {x_1}^{k} {x_2}^{n+1-k} \ .
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Consequentemente, juntando (2.12) e (2.13) e substituindo em (2.11), obtemos

$$(x_1+x_2)^{n+1} = {x_1}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} {x_1}^k {x_2}^{n+1-k} + {x_2}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} {x_1}^k {x_2}^{n+1-k}$$

$$= {x_1}^{n+1} + {x_2}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] {x_1}^k {x_2}^{n+1-k} \ .$$

Ora, pela regra de Pascal expressa no Teorema 2.3.1, obtemos

$$(x_1+x_2)^{n+1} = {x_1}^{n+1} + {x_2}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} {x_1}^k {x_2}^{n+1-k}$$

pelo que, podemos escrever

$$\begin{aligned} (x_1+x_2)^{n+1} = & \left[\binom{n+1}{n+1} {x_1}^{n+1} + {x_2}^{n+1-n-1} \right] \\ & + \left[\binom{n+1}{0} {x_1}^0 {x_2}^{n+1} \right] + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} {x_1}^k {x_2}^{n+1-k} \end{aligned}$$

ou ainda

$$(x_1+x_2)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} {x_1}^k {x_2}^{n+1-k} \ ,$$

ficando assim demonstrado o passo indutivo, e completando-se a demonstração da primeira igualdade em (2.9). A segunda igualdade em (2.9),

$$(x_1+x_2)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {x_2}^k {x_1}^{n-k}$$

pode ser demonstrada de forma análoga, ficando assim demonstrado o Teorema 2.3.2 do binómio de Newton. □

Exemplo 2.3.1. *Mostrar que, dados* n *objetos distintos, há tantas maneiras de escolher um número par de objetos como escolher um número ímpar.*

Considerando o desenvolvimento de $(1-1)^n$ *pela fórmula* (2.9) *do Binómio* *de Newton, podemos escrever*

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k$$

ou seja,

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

donde resulta

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots \ . \tag{2.14}$$

A expressão no primeiro membro de (2.14) *indica o número total de maneiras de, entre os n objetos dados, escolher* 0 *ou* 2 *ou* 4 *ou etc, ou seja, indica o número total de maneiras de escolher um número par de objetos. Analogamente, a expressão no segundo membro de* (2.14) *indica o número total de maneiras de escolher um número ímpar de objetos. Assim, a igualdade* (2.14) *responde precisamente ao pretendido.*

Exemplo 2.3.2. *Mostrar que a soma dos elementos da n-ésima linha do triângulo de Pascal é igual a 2^n.*

A n-ésima linha do triângulo de Pascal é composta pelos coeficientes binomiais dessa linha, ou seja, pelos coeficientes $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Para obter o valor da soma destes coeficientes, basta recorrer à fórmula do binómio de Newton, (2.9), *e considerar $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, resultando*

$$(1+1)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$$

ou seja,

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

como se pretendia demonstrar.

Exemplo 2.3.3. *O número de Euler (ou número de Neper), representado por* e*, é um famoso número irracional, com muitas aplicações em Matemática. Os primeiros algarismos desta dízima infinita não periódica são:*

$$2,71828\ . \tag{2.15}$$

O número e de Euler é a base dos logaritmos naturais (inventados por John Napier). Vamos usar o binómio de Newton para ilustrar uma forma simples de obter a expressão (2.15) *do número de Euler, usando o seguinte facto bem conhecido,*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{2.16}$$

Pela fórmula (2.9) *do binómio de Newton, temos*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\ \frac{1}{n^k}\ . \tag{2.17}$$

Ora, notando que o termo

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) \tag{2.18}$$

possui k fatores e que

$$\frac{1}{n^k} = \frac{1}{n \times n \times n \times \ldots \times n} \tag{2.19}$$

possui também k fatores, podemos escrever

$$\frac{n!}{(n-k)!}\ \frac{1}{n^k} = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \ldots \times \frac{n-k+1}{n} \tag{2.20}$$

que constitui um produto de k fatores. Assim, da equação (2.17) *resulta*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\,\cdots\,\frac{n-k+1}{n}\ . \tag{2.21}$$

Tomando o limite em ambos os membros da equação (2.21) *quando n tende para $+\infty$, e atendendo a que o produto* (2.20) *tende para* 1, *obtemos*

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \tag{2.22}$$

com o significado

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ . \tag{2.23}$$

Qualquer uma das equações (2.22) *ou* (2.23) *representa a expansão em série de Taylor [7] do número e. Estas equações indicam que a série converge e que o número e é precisamente a soma da série. Omitindo aqui os detalhes sobre esta série e sobre a sua convergência, por ir para além dos propósitos desta tese, podemos usar a equação* (2.23) *para obter uma aproximação do número e, em particular para obter a expressão* (2.15).

Considerando, no mínimo, 9 parcelas na expansão (2.22) *ou* (2.23) *obtemos a aproximação*

$$e = 2,71828\ \ .$$

2.4 Princípio da Inclusão-Exclusão

Em combinatória, este princípio é amplamente utilizado, pois fornece uma forma de contar o número de elementos da união de um número finito de conjuntos, não necessariamente todos disjuntos. Por outro lado, e em relação ao tema central desta tese, é também de referir que este princípio será utilizado na resolução do Problema de Lucas.

Consideremos um conjunto A com N elementos e as r propriedades $p_1, p_2, \ldots, p_r$

que os elementos de A poderão ou não possuir. De forma a enunciarmos o princípio da inclusão-exclusão, vamos introduzir as seguintes notações:

- $N(p_i)$ – número de elementos de A que possuem a propriedade p_i;
- $N(\bar{p_i})$ – número de elementos de A que não possuem a propriedade p_i;
- $N(p_i p_j)$ – número de elementos de A que possuem, simultaneamente, as propriedades p_i e p_j;
- $N(\bar{p_i}\bar{p_j})$ – número de elementos do conjunto A que não possuem a propriedade p_i nem a propriedade p_j;
- $N(p_i\bar{p_j})$ – número de elementos de A que possuem a propriedade p_i, mas não possuem a propriedade p_j;

e assim sucessivamente.

Dado um qualquer elemento de A, ou ele possui a propriedade p_i ou ele não a possui, pelo que se tem,

$$N(\bar{p_i}) = N - N(p_i)\ . \tag{2.24}$$

Não é difícil concluir que, considerando duas propriedades p_i e p_j, teremos também

$$N(\bar{p_i}\bar{p_j}) = N - \big[N(p_i) + N(p_j)\big] + N(p_i p_j) \tag{2.25}$$

onde a última parcela se justifica porque os elementos de A que não possuem p_i nem p_j foram excluídos duas vezes na parcela anterior.

A generalização das fórmulas (2.24) e (2.25) a um número arbitrário de propriedades é feita pelo princípio da Inclusão-Exclusão enunciado e demonstrado seguidamente.

Teorema 2.4.1 (Princípio da Inclusão-Exclusão). *Seja A um conjunto com N elementos e consideremos r propriedades $p_1, p_2, \ldots, p_r$ que os elementos de A podem ou não possuir. Então, o número de elementos de A que não* *possuem nenhuma das propriedades consideradas é dado por*

$$N\left(\overline{p_1}\,\overline{p_2}\ldots\overline{p_r}\right)=N-\sum_{i=1}^{r}N\left(p_i\right)+\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{r}N\left(p_ip_j\right)-\sum_{\substack{i,j,k=1\\i<j<k}}^{r}N\left(p_ip_jp_k\right)+$$
$$+\sum_{\substack{i,j,k,l=1\\i<j<k<l}}^{r}N\left(p_ip_jp_kp_l\right)+\cdots+(-1)^rN\left(p_1p_2p_3...p_r\right) \qquad (2.26)$$

Demonstração: Para a demonstração, iremos mostrar que cada elemento do conjunto A contribui com o mesmo número de unidades para cada membro da igualdade (2.26). Se tal realmente acontecer, então serão iguais o primeiro e o segundo membro da expressão (2.26). Assim:

1. Um elemento de A que não possua nenhuma das propriedades contribui com uma unidade para o primeiro membro da igualdade (2.26); quanto ao segundo membro da igualdade, o mesmo elemento de A contribui com uma unidade para a parcela N e com zero unidades para cada um dos somatórios, o que se traduz numa unidade para o segundo membro.

2. Um elemento de A que possua apenas uma das r propriedades consideradas contribui com zero unidades para o primeiro membro da igualdade (2.26); quanto ao segundo membro da igualdade, o mesmo elemento de A contribui com uma unidade para a parcela N, com uma unidade para o primeiro somatório e com zero unidades para cada um dos somatórios seguintes, o que se traduz em 1-1=0 unidades para o segundo membro.

3. Um elemento de A que possua exatamente duas das r propriedades consideradas, contribui com zero unidades para o primeiro membro da igualdade (2.26); quanto ao segundo membro da igualdade, o mesmo elemento de A contribui com uma unidade para a parcela N, com $\binom{2}{1}=2$ unidades para o primeiro somatório, com $\binom{2}{2}=1$ unidade para o segundo somatório e com zero unidades para os somatórios se-

guintes, o que se traduz numa unidade para o segundo membro, 1-(1+1)+1=0.

4. Um elemento de A que possua exatamente três das r propriedades consideradas contribui com zero unidades para o primeiro membro da igualdade (2.26); quanto ao segundo membro da igualdade, o mesmo elemento de A contribui com uma unidade para a parcela N, com $\binom{3}{1} = 3$ unidades para o primeiro somatório, com $\binom{3}{2} = 3$ unidades para o segundo somatório, com $\binom{3}{3} = 1$ unidade para o terceiro somatório e com zero unidades para os somatórios seguintes, o que se traduz numa unidade para o segundo membro, $1 - 3 + 3 - 1 = 0$.

5. Analogamente, e generalizando, um elemento de A que possua exatamente q das r propriedades consideradas ($q \leq r$) contribui com zero unidades para o primeiro membro da igualdade (2.26); já para o segundo membro da igualdade, esse elemento irá contribuir com as seguintes unidades:

$$\begin{aligned}
1 - \binom{q}{1} + \binom{q}{2} - \binom{q}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{q}{q} \\
&= \binom{q}{0} - \binom{q}{1} + \binom{q}{2} - \binom{q}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{q}{q} \\
&= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \binom{q}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i 1^{q-i} \binom{q}{i} \\
&= (1-1)^q \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde se usou a fórmula (2.9) do binómio de Newton apresentada no Teorema 2.3.2 .

A demonstração do princípio da inclusão-exclusão fica assim completa, uma vez que todo o elemento de A contribui com o mesmo número de unidades para o primeiro e para o segundo membro da igualdade (2.26). $\square$

Observação 2.4.1. *Os somatórios da expressão (2.26) são estendidos às combinações de índices do conjunto* $\{1, 2, \ldots, r\}$ *tomadas 1 a 1 no primeiro somatório, 2 a 2 no segundo somatório e assim sucessivamente.*

Exemplo 2.4.1. *A Carolina tem, no seu quarto, um pequeno armário com 12 gavetas numeradas de 1 a 12. Sabendo que a Carolina pretende guardar os seus brincos, as suas pulseiras e os seus anéis, separadamente, em três gavetas de número par, de quantas formas distintas poderá ela colocar os seus três tipos de pertences?*
Consideremos as propriedades:

• p_1 *é a propriedade de arrumar os pertences,de tal forma que os brincos não ficam numa gaveta par;*

• p_2 *é a propriedade de arrumar os pertences,de tal forma que as pulseiras não ficam numa gaveta par;*

• p_3 *é a propriedade de arrumar os pertences,de tal forma que os anéis não ficam numa gaveta par;*

Então a resposta será dada pelo número total de possibilidades de arrumar os pertences, sem que se verifique a propriedade p_1*, nem a propriedade* p_2*, nem a propriedade* p_3*. Consequentemente, a resposta é dada por*

$$\begin{aligned} N(\overline{p_1 p_2 p_3}) &= N - \Big[N(p_1) + N(p_2) + N(p_3)\Big] \\ &\quad + \Big[N(p_1 p_2) + N(p_1 p_3) + N(p_2 p_3)\Big] - N\left(p_1 p_2 p_3\right), \end{aligned}$$

onde

$$N = A_3^{12} = 1320 \qquad N(p_i) = 6 \times A_{11}^2 = 660$$

$$N(p_i p_j) = A_6^2 \times 10 = 300 \qquad N(p_1 p_2 p_3) = A_6^3 = 120\,.$$

Então,

$$N(\overline{p_1 p_2 p_3}) = 1320 - 3 \times 660 + 3 \times 300 - 120 = 120.$$

Exemplo 2.4.2. *Quantos são os anagramas de CAROL que possuem a letra C em primeiro lugar ou a letra A em segundo lugar ou a letra R em terceiro lugar?*

• p_1 *é a propriedade de dispor as letras, de tal forma que* C *está em primeiro lugar.*

• p_2 *é a propriedade de dispor as letras, de tal forma que* A *está em segundo lugar.*

• p_3 *é a propriedade de dispor as letras, de tal forma que* R *está em terceiro lugar.*

Então a resposta será dada pelo número total de anagramas, retirando aqueles em que C *não está em primeiro lugar, nem* A *em segundo lugar, nem* R *em terceiro lugar. Pelo princípio da inclusão-exclusão, Teorema (2.4.1), a resposta é dada por*

$$\begin{aligned}
N - N(\overline{p}_1\overline{p}_2\overline{p}_3) &= N - \sum_{i=1}^{3} N(p_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{3} N\left(p_i p_j\right) - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{3} N\left(p_i p_j p_k\right) \\
&= 5! - [N(p_1) + N(p_2) + N(p_3)] \\
&\quad + \big[N(p_1p_2) + N(p_1p_2) + N(p_1p_3) + N(p_2p_3)\big] \\
&\quad - \big[N(p_1p_2p_3)\big] \\
&= 120 - (24 + 24 + 24) + (6 + 6 + 6) - (2) \\
&= 120 - 72 + 18 - 2 \\
&= 64 \ .
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Lemas de Kaplansky

Pensa-se que o problema que atualmente é conhecido como *Problema de Lucas*, também designado por *Problème des Ménages*, terá aparecido pela primeira vez em 1891 por intermédio de Édouard Lucas, como referido por Kenneth Bogart e Peter Doyle [3], ou por John Riordan [13]. No entanto, no seu trabalho, Lucas não fornecia uma solução explícita para o problema. Só cerca de cem anos mais tarde, em 1943, Irving Kaplansky [5] finalmente conseguiu fornecer ao problema a solução explícita que faltava.

A demonstração publicada por Kaplansky não é simples nem intuitiva, mas é correta e rigorosa do ponto de vista matemático. Por ser tal a importância dos dois lemas que Kaplansky formulou e demonstrou para encontrar a solução do *Problema de Lucas*, decidi dedicar-lhes um capítulo no presente trabalho.

Na minha opinião, o 1º Lema de Kaplansky não é imediato, tendo por isso considerado pertinente apresentar três demonstrações, baseadas em técnicas distintas. O 2º Lema de Kaplansky decorre do primeiro e, em minha opinião, é de mais simples compreensão que o primeiro. Este segundo lema é fulcral para a resolução do *Problema de Lucas*.

3.1 Primeiro Lema de Kaplansky

Este lema fornece um método de contagem que permite escolher um determinado número de elementos não consecutivos de um conjunto onde os elementos estão dispostos em linha.

Teorema 3.1.1. ***(1º Lema de Kaplansky):*** *O número de maneiras de escolher k elementos a partir de um conjunto X de n elementos dispostos em linha e sem que se escolham dois elementos consecutivos é dado por C_k^{n-k+1}.*

Tal como já foi referido anteriormente, o 1º Lema de Kaplansky, Teorema 3.1.1, não é imediato e é um lema muito importante para a solução do *Problema de Lucas.* Assim, apresentamos a seguir três demonstrações distintas para que ele possa ser bem compreendido. A primeira demonstração é indutiva e baseia-se precisamente no método de indução. A segunda demonstração conduz ao problema de contar o número de soluções inteiras positivas de uma determinada equação. Já a terceira demonstração é talvez mais esquemática e intuitiva, baseando-se no preenchimento de espaços vazios por entre determinados elementos já escolhidos.

Antes de passarmos às demonstrações, consideremos a seguinte Figura 3.1, que nos mostra os n elementos dispostos em linha, como refere o enunciado do Teorema 3.1.1.

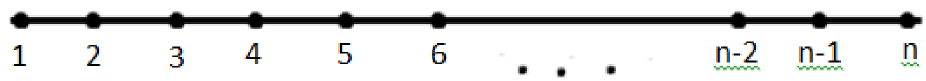

Figura 3.1: Disposição em linha dos n elementos referidos no Teorema 3.1.1.

Passemos agora a apresentar as demonstrações do Teorema 3.1.1.

Demonstração 1: Considerando $f(n,k)$ como o número pretendido, vamos então mostrar que $f(n,k) = C_k^{n-k+1}$. Comecemos por notar que:

- Se $k = 1$ e n qualquer, então é óbvio que $f(n,1) = n$, podendo escrever-se como $f(n,1) = C_1^n$, ou ainda como $f(n,1) = C_1^{n-1+1}$.

- Se $k = n$ então é também óbvio que $f(n,n) = 0$, visto não ser possível escolher todos os n elementos de X, por serem consecutivos.

- Seja agora $1 < k < n$.

  Consideremos os n elementos dispostos em linha, e vamos separar em dois conjuntos A e B as seleções que levam à contagem pretendida.

  Assim, seja A o conjunto formado pelas seleções de k dos n elementos de X que incluem o primeiro elemento da linha, e seja B o conjunto formado pelas seleções de k dos n elementos de X que não incluem o primeiro elemento da linha.

  Ora, no conjunto A, se o primeiro elemento pertence às seleções, então o segundo não estará nessa seleção, pois dessa forma seriam escolhidos dois elementos consecutivos. Então o número de seleções do conjunto A é dado por $f(n-2, k-1)$.

  Já no conjunto B, como o primeiro elemento da linha não pertence a essas seleções, teremos $n-1$ elementos à disposição para escolher k deles. Logo, o número de seleções do conjunto B é dado por $f(n-1, k)$.

  Consequentemente,

$$f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-2,k-1)\ . \tag{3.1}$$

Usando a decomposição (3.1), vamos provar, por indução sobre n, que

$$f(n,k) = C_k^{n-k+1}, \quad \text{para todo} \quad k \ \text{ tal que } \ 1 \leq k < n. \tag{3.2}$$

Comecemos por notar que a fórmula (3.2) só é válida para $n \geq 3$, sendo que os casos $n = 1$ e $n = 2$ se reduzem ao caso $k = 1$. Passemos agora à indução propriamente dita.

Passo base ($n = 3$).

Pretendemos mostrar que $f(3,k) = C_k^{4-k}$. Ora, se $k = 1$, então $f(3,1) = C_1^3 = 3$, e se $k = 2$, então $f(3,2) = C_2^2 = 1$. Acresce que k não poderá ser superior a 2, visto que de entre três elementos, não é possível escolher três ou mais que não sejam consecutivos.

Passo indutivo. Por hipótese de indução, temos

$$f(n-1,k) = C_k^{n-k} \qquad \text{e} \qquad f(n-2,k-1) = C_{k-1}^{n-k} \tag{3.3}$$

e combinando (3.1) e (3.3), resulta

$$f(n,k) = C_k^{n-k} + C_{k-1}^{n-k} \ . \tag{3.4}$$

Pelo Teorema 2.3.1 que estabelece a regra de Pascal expressa na equação (2.8), temos que

$$C_k^{n-k} + C_{k-1}^{n-k} = C_k^{n-k+1} \ ,$$

concluindo assim a primeira demonstração.

□

Demonstração 2: Seja $f(n,k)$ o número pretendido, e vamos mostrar que $f(n,k) = C_k^{n-k+1}$. Consideremos um conjunto de k elementos escolhidos de entre os n existentes no conjunto X dispostos de forma crescente e sejam

– a_1 o número de elementos que se encontram antes do 1º elemento escolhido;

– a_2 o número de elementos que estão situados entre o 1º e o 2º elementos escolhidos;

– a_3 o número de elementos que estão situados entre o 2º e o 3º elementos escolhidos; e assim por diante.

Sejam, mais em geral,

– a_k o número de elementos existentes entre o (k-1)-ésimo e o k-ésimo elementos escolhidos;

– a_{k+1} o número de elementos existentes após o k-ésimo elemento escolhido.

Ora, $a_1 \geq 0$, pois o primeiro elemento a ser escolhido pode ser qualquer um dos n existentes dispostos por ordem crescente. Se for o primeiro dos n, então não existe qualquer elemento antes desse primeiro escolhido e então, $a_1 = 0$; se o primeiro elemento a ser escolhido não for o primeiro dos n existentes, então, $a_1 > 0$. Logo, $a_1 \geq 0$.

Analogamente, $a_{k+1} \geq 0$, pois o último elemento a ser escolhido pode ser qualquer um dos n existentes dispostos por ordem crescente. Se for o último desses n elementos, então não existem mais elementos que estejam depois dele, sendo que $a_{k+1} = 0$; se o último elemento a ser escolhido não for o último dos n existentes, então, $a_{k+1} > 0$. Logo, $a_{k+1} \geq 0$.

Por outro lado, relativamente a $a_2, a_3, \ldots, a_k$, tem-se que $a_2 \geq 1$, $a_3 \geq 1$, ..., $a_k \geq 1$, pois como queremos escolher k elementos não consecutivos a partir dos n elementos existentes dispostos por ordem crescente, tem de existir sempre pelo menos um elemento entre cada dois elementos escolhidos.

Como, da sequência de n elementos dados (Figura 3.1), selecionamos k elementos, a soma de todos os números a_j dá precisamente o número de elementos não selecionados, isto é temos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1} = n - k \tag{3.5}$$

onde, como se viu,

$$a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 1,\ a_3 \geq 1,\ \ldots,\ a_k \geq 1,\ a_{k+1} \geq 0\ . \tag{3.6}$$

Para passarmos a um problema mais simples, considere-se

$$x_2 = a_2 - 1,\ x_3 = a_3 - 1,\ \ldots,\ x_k = a_k - 1\ .$$

A equação (3.5) pode escrever-se na forma

$$a_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + a_{k+1} = n - k - (k-1)$$

ou seja

$$a_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + a_{k+1} = n - 2k + 1 \tag{3.7}$$

onde, agora,

$$a_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ \ldots,\ x_k \geq 0,\ a_{k+2} \geq 0\ . \tag{3.8}$$

estando, assim, todas as incógnitas vinculadas ao mesmo tipo de restrições. É claro que contar o número de soluções distintas da equação (3.5) sujeita às restrições (3.6) equivale a contar o número de soluções distintas da equação (3.7) vinculada pelas condições (3.8). O último problema é bem conhecido em Combinatória [12] e corresponde a contar o número de maneiras de distribuir $n-2k+1$ objetos iguais, que são as unidades que figuram no segundo membro de (3.7), por $k+1$ caixas distintas, que são as incógnitas que figuram no primeiro membro de (3.7), podendo deixar caixas vazias. A solução deste problema é dada pelo número de combinações com possível reutilização, formadas a partir de $k+1$ elementos distintos (as caixas), com tamanho $n-2k+1$ (os objetos a distribuir), ou seja, por

$$\overline{C}\,^{k+1}_{n-2k+1} = C\,^{n-k+1}_{n-2k+1} = C\,^{n-k+1}_{k}\ , \tag{3.9}$$

onde se usou a expressão (2.7) para a primeira igualdade em (3.9) e a relação (2.4) para a segunda igualdade.

Como cada solução do problema (3.7), (3.8) dá uma solução do problema de contagem considerado nesta demonstração, temos que $f(n,k) = C_k^{n-k+1}$, ficando assim concluída a segunda demonstração. □

Demonstração 3: Seja, novamente, $f(n,k)$ o número pretendido e mostremos que $f(n,k) = C_k^{n-k+1}$. Consideremos um conjunto X de n elementos, dispostos em fila, pela ordem *elemento* 1, *elemento* 2, … *elemento* n.

Pretendemos escolher um subconjunto com k destes elementos sem selecionar elementos consecutivos. Imaginemos que, para fazer esta escolha, vamos construir uma nova sequência de "zeros" e "uns", de tamanho n, de tal forma que o algarismo 1 (um) na posição i indica que o *elemento* i do conjunto X

será selecionado para o subconjunto, enquanto que o algarismo 0 (zero) na posição j indica que o *elemento* j do conjunto X não é selecionado. Se, por exemplo, fosse $k = 3$ e quiséssemos escolher os elementos 3, 4 e n-1, deveríamos formar a seguinte sequência

$$0\,0\,1\,1\,0\,0 \ldots 0\,1\,0$$

Mais em geral, o objetivo é escolher subconjuntos de k elementos não consecutivos. Então, iremos formar sequências com k algarismos 1 e $n-k$ algarismos 0, sendo que não poderemos ter algarismos 1 consecutivos. O número pretendido, $f(n,k)$, pode ser obtido contando estas sequências. Esta contagem pode ser efetuada dispondo primeiro os $n-k$ algarismos 0 e colocando depois os k algarismos 1 entre os algarismos 0, de forma que dois algarismos 1 não fiquem consecutivos. Assim, os algarismos 1 irão ocupar k das $n-k+1$ posições disponíveis, que são precisamente uma a seguir a cada 0 mais uma antes do primeiro 0. A disposição dos algarismos 0 pode ser feita de uma única maneira, e a colocação dos algarismos 1 pode ser feita de C_k^{n-k+1} maneiras distintas. Conclui-se então que $f(n,k) = C_k^{n-k+1}$, ficando também completa a terceira demonstração.

□

3.2 Segundo Lema de Kaplansky

Este lema fornece um método de contagem para o problema de escolher um determinado número de elementos não consecutivos de um conjunto onde os elementos estão dispostos de forma circular.

Teorema 3.2.1. *O número de maneiras de escolher k elementos a partir de um conjunto X de n elementos dispostos de forma circular e sem que se escolham dois elementos consecutivos é dado por $C_k^{n-k}\frac{n}{n-k}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.1, 1º Lema de Kaplansky, já sabemos que o número de maneiras de escolhermos k elementos a partir de um conjunto X de n elementos dispostos em linha, e sem que escolhamos dois elementos consecutivos, é dado por $f(n,k) = C_k^{n-k+1}$. Ora, a seleção de elementos pedida neste 2º Lema apenas irá diferir da seleção de elementos pedida no 1º Lema num aspeto: enquanto que no 1º Lema os elementos são dispostos em linha, neste 2º Lema eles são dispostos de forma circular. Esta diferença impõe uma restrição: o primeiro e o último elementos não podem pertencer, simultaneamente, à seleção de elementos.

Suponhamos que os elementos dispostos de forma circular estejam distribuídos por ordem crescente, no sentido dos ponteiros do relógio, tal como ilustrado na Figura 3.2.

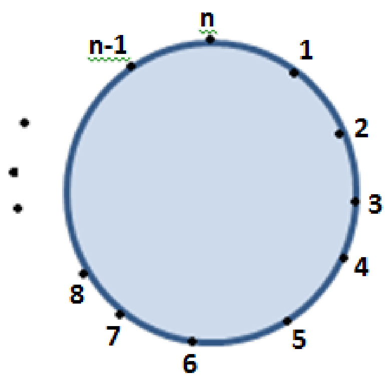

Figura 3.2: Elementos dispostos de forma circular por ordem crescente no sentido dos ponteiros do relógio.

Se tomarmos a disposição exatamente idêntica, mas colocando todos os elementos em linha, obtemos a disposição representada na Figura 3.3. Aten-

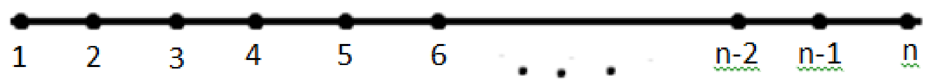

Figura 3.3: Elementos com disposição em linha.

dendo a esta transformação, fica claro que o número de seleções que se pede neste 2º Lema pode ser obtido do número $f(n,k) = C_k^{n-k+1}$ do 1º Lema retirando o número de seleções às quais pertencem, simultaneamente, o primeiro e o último (n-ésimo) elementos. Quando consideramos os elementos dispostos em linha, verificamos que, para que o primeiro e o último elementos sejam selecionados por entre os k elementos, então o segundo e o penúltimo (elemento $n-1$) elementos não podem ser selecionados, pois, caso contrário, os correspondentes conjuntos iriam possuir elementos consecutivos.

Então, os conjuntos a que pertencem o primeiro e o último elementos terão $k-2$ elementos escolhidos entre $n-4$ à disposição, o que nos leva a $f(n-4, k-2)$, e o número de escolhas neste 2º Lema de Kaplansky será dado por $f(n,k) - f(n-4, k-2)$.

Vamos, finalmente, verificar que

$$f(n,k) - f(n-4,k-2) = C_k^{n-k} \frac{n}{n-k}.$$

De facto, do 1º Lema temos

$$f(n,k) - f(n-4,k-2) = C_k^{n-k+1} - C_{k-2}^{n-k-1}$$

e com cálculos simples obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
f(n,k) - f(n-4,k-2) &= \frac{(n-k+1)!}{k!(n-2k+1)!} - \frac{(n-k-1)!}{(k-2)!(n-2k+1)!} \\
&= \frac{(n-k-1)!\,(n-k+1)(n-k)}{k!(n-2k+1)!} - \frac{(n-k-1)!\,k(k-1)}{k!(n-2k+1)!} \\
&= \frac{(n-k-1)!\,[(n-k+1)(n-k) - k(k-1)]}{k!(n-2k+1)!} \\
&= \frac{(n-k-1)!\,(n^2 - 2nk + n)}{k!\,(n-2k+1)!} \\
&= \frac{(n-k)!\,n(n-2k+1)}{(n-k)k!(n-2k+1)(n-2k)!} \\
&= C_k^{n-k} \frac{n}{n-k}\ .
\end{aligned}$$

□

Estes dois lemas de Kaplansky demonstrados neste capítulo irão ser essenciais para a resolução do *Problema de Lucas*, no próximo capítulo. Estes lemas permitiram resolver definitivamente o *Problema de Lucas*.

Capítulo 4

Problema de Lucas

O *Problema de Lucas* é um problema clássico, tendo aparecido, muito provavelmente, pela primeira vez em 1891 por Edouard Lucas (1842-1891), que colocou o problema na sua publicação Théorie des Nombres [8].

Também conhecido como o *Problema dos Casais* ou o *Problème des Ménages*, este problema procura o número de formas de sentar n casais em torno de uma mesa circular, de modo que homens e mulheres fiquem em lugares alternados e nenhum dos elementos de um casal fique junto do seu par, isto é, nenhum homem fique sentado à esquerda ou à direita da sua mulher.

Este problema, longe de ter uma solução fácil, foi abordado por muitos autores ao longo dos anos.

Ball W. e Coxeter H. [2], em 1947, mostraram-se satisfeitos ao conseguir solucionar o problema quando o número n de casais varia de 2 a 10.

Já Touchard J. [15], em 1934, forneceu uma fórmula para a solução do problema, sem no entanto, a ter demonstrado, tendo sido Irving Kaplansky [5] que, em 1943, enunciou e demonstrou um lema que explicava a fórmula encontrada por Touchard J. alguns anos antes.

Kaplansky e Riordan J. [6] formalizaram conjuntamente, em 1946, uma resposta ao Problema de Lucas, isto é, sistematizaram a solução do Problema, tendo sido os primeiros a pensar em começar por fixar a posição das mulheres ("ladies first"), como referido por Bogart K. e Doyle P. [3] em 1986.

O interesse de Riordan pelo Problema de Lucas continuou patente na sua obra [13] sobre Combinatória, na qual referiu o problema de Lucas como um exemplo de um problema com restrições nas posições.

Bogart K. e Doyle P. [3] retomaram o Problema de Lucas e em 1986 apresentaram uma solução que apelidaram de "não sexista". Esta solução é obtida considerando o conjunto de todas as permutações das $2n$ pessoas, não fixando mulheres ou homens. Depois, são retirados os casos em que os casais estão juntos, através do Princípio de Inclusão Exclusão.

Atualmente, o problema de Lucas continua a despertar muito interesse na comunidade matemática, sobretudo ao nível de professores e investigadores em formação avançada. São vários os trabalhos produzidos neste âmbito no sentido de acrescentar algum detalhe explicativo ou alguma aplicação interessante. A título de exemplo, cita-se aqui a contribuição, em língua portuguesa, de Luiz dos Santos [14].

A minha monografia é também dedicada ao Problema de Lucas e no presente capítulo vamos apresentar a sua resolução usando os Lemas de Kaplansky demonstrados no capítulo precedente, capítulo 3. De modo a facilitar a leitura, a resolução do problema irá ser apresentada da seguinte forma.

Começamos com os casos em que $n = 1$ e $n = 2$, mostrando que o problema não tem solução. Entra-se de seguida no caso em que $n = 3$, o primeiro em que, efetivamente, o problema permite solução. A título ilustrativo, construímos, para este caso, todas as configurações que respondem ao Problema de Lucas.

Do caso em que $n = 3$, passa-se então para o caso geral em que n é qualquer. Enunciamos um lema, com a respetiva demonstração, que fornece uma fórmula para dar resposta ao problema de Lucas. Tal fórmula é então aplicada nos casos em que $n = 4$ e $n = 5$, evidenciando que a contagem das configurações favoráveis ao problema de Lucas pode ser feita de forma exaustiva e simples.

Terminamos com uma tabela, na qual apresentamos, até $n = 6$, a resposta ao problema, ou seja o número de formas de sentar n casais em torno de uma mesa circular, de modo a que homens e mulheres fiquem alternados e os elementos de cada casal fiquem separados.

(A) Casos $\boldsymbol{n = 1}$ e $\boldsymbol{n = 2}$. Dando início à resolução do problema, verifica-se que, para 1 ou 2 casais não existe solução, pois não é possível sentar 1 ou 2 casais em volta de uma mesa circular sem violar alguma das restrições impostas, nomeadamente, sem que fiquem lado a lado os elementos de um mesmo casal e sem que homens e mulheres ocupem lugares consecutivos.

(B) Caso $\boldsymbol{n = 3}$. Para 3 ou mais casais, o problema já tem solução. De seguida ilustra-se a sua resolução para o caso de 3 casais, exibindo-se as 12 configurações favoráveis ao problema. Para tal, para cada $i = 1, 2, 3$, denotamos por H_i o homem do casal i e por M_i a mulher correspondente. As configurações favoráveis podem ser representadas como se indica a seguir na Figura 4.1.

(C) Caso geral. Vamos agora prosseguir com a solução do problema geral, isto é, no caso com um número arbitário n de casais. A resposta é dada pelo seguinte resultado apresentado no Lema 4.0.1

Lema 4.0.1 (Problema de Lucas)**.** *O número de soluções possíveis, $L(n)$, de organizar n casais em torno de uma mesa circular, de forma que homens e mulheres fiquem em lugares alternados e nenhum dos elementos de um casal fique junto do seu par, isto é, nenhum homem fique sentado à esquerda ou à direita da sua mulher, é*

$$L(n) = 2n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k^{2n-k} \frac{2n}{2n-k} (n-k)! \,. \tag{4.1}$$

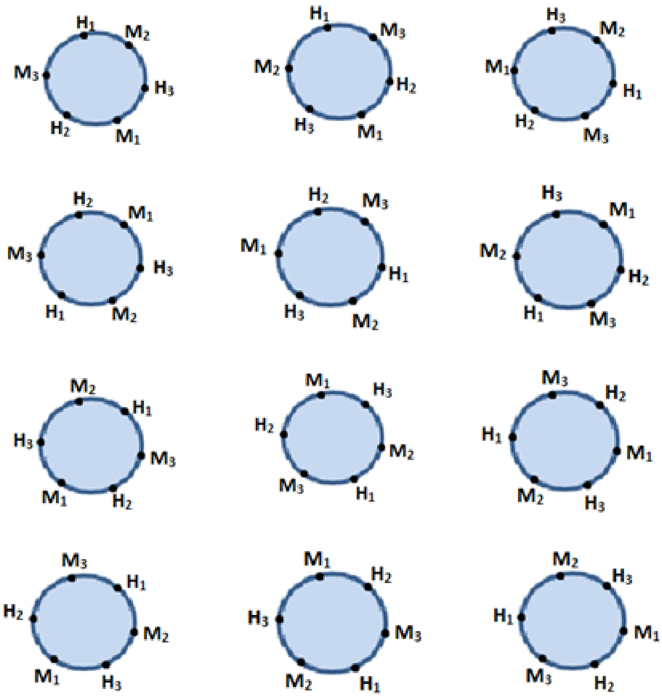

Figura 4.1: Solução do problema para 3 casais: configurações favoráveis.

Demonstração. Consideremos os $2n$ lugares numa mesa circular, numerados de 1 a $2n$, de forma crescente no sentido dos ponteiros do relógio. Vamos deduzir a fórmula (4.1) para $L(n)$, organizando a sua dedução em três etapas.

1. **Sentam-se os n homens na mesa circular**
   Seja $P(n)$ o número de maneiras de se sentar os n homens. Tal como se enuncia no problema, os homens devem ficar alternados com as mulheres, podendo ocupar os lugares pares ou os lugares ímpares. Como existem $n!$ formas de distribuir os n homens por n lugares pares e $n!$ formas de os distribuir por n lugares ímpares, teremos, no total, $2n!$ maneiras distintas de distribuir os homens pela mesa circular donde

$$P(n) = 2n!\ . \tag{4.2}$$

   Suponhamos, agora, que os homens estão já sentados, e fixemos uma qualquer das configurações ocupadas pelos homens. Nesta configuração, denota-se por $H_1, H_2, \ldots, H_n$ os homens que ocupam os lugares de forma crescente, no sentido dos ponteiros do relógio, tal como ilustra a Figura 4.2. Desta forma, H_1 é consecutivo de H_n.

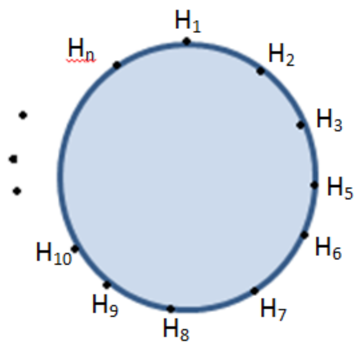

Figura 4.2: Disposição dos n homens em torno da mesa circular, ordenados segundo o movimento dos ponteiros do relógio.

2. **Sentam-se agora as n mulheres na mesa circular**

   Consideremos as n mulheres, $M_1, M_2, \ldots, M_n$, e seja M_i o par de H_i. Vamos sentar as n mulheres, atendendo a que deverão alternar com os homens (se os homens estiverem sentados nas cadeiras pares, as mulheres ficarão sentadas nas cadeiras ímpares, e vice-versa).

   Seja S o conjunto das permutações das n mulheres pelos n lugares disponíveis. O cardinal de S dá-nos o número de formas de sentar as mulheres alternadamente com os homens, sem qualquer restrição. Ora, como o enunciado do Problema de Lucas nos indica que cada mulher M_i não pode ficar sentada ao lado do seu par, H_i, temos a necessidade de colocar restrições nas possibilidades de sentar as mulheres. Assim, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, M_i não pode estar sentada na cadeira à esquerda de H_i nem na cadeira à direita de H_i.

   No sentido de efetuar a contagem em causa, vamos usar o Princípio da Inclusão-Exclusão, apresentado no Teorema 2.4.1 desta monografia. Para tal, comecemos por introduzir:

- Os conjuntos A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tais que cada A_i representa o conjunto das permutações das n mulheres pelos n lugares disponíveis, de tal forma que a mulher M_i se encontra à esquerda de H_i.
- Os conjuntos $A_i^{'}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tais que cada $A_i^{'}$ representa o conjunto das permutações das n mulheres pelos n lugares disponíveis, de tal forma que a mulher M_i se encontra à direita de H_i.

Ordenemos os $2n$ conjuntos A_i e $A_i^{'}$ da seguinte forma

$$A_1^{'}, A_1, A_2^{'}, A_2, A_3^{'}, A_3, \ldots A_n^{'}, A_n$$

e convencionemos que $A_1^{'}$ é o conjunto consecutivo de A_n numa representação circular dos $2n$ conjuntos.

Vamos determinar o número de maneiras, $K(n)$, de sentar as n mulheres nos lugares deixados disponíveis pelos homens, sabendo que cada mulher não pode estar ao lado (esquerdo ou direito) do seu par. Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, Teorema 2.4.1, temos que:

$$\begin{aligned} K(n) = N(S) &- \left[N(A_1) + N(A_1^{'}) + \ldots + N(A_n) + N(A_n^{'})\right] \\ &+ \left[N(A_1A_1^{'}) + N(A_1^{'}A_2) + \ldots + N(A_nA_n^{'})\right] \\ &- \left[N(A_1A_1^{'}A_2) + N(A_1^{'}A_2A_2^{'}) + \ldots + N(A_{n-1}^{'}A_nA_n^{'})\right] \\ &+ \ldots (-1)^{2n} N(A_1A_1^{'}A_2A_2^{'}A_3A_3^{'} \ldots A_nA_n^{'}), \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde as notações são as que foram introduzidas na Seção 2.4 para o Teorema 2.4.1. Serão nulas algumas das parcelas de $K(n)$ na expressão (4.3). Vejamos os dois casos mais imediatos:

- Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, temos $N(A_i^{'}A_i) = 0$, uma vez que M_i não pode estar sentada, simultaneamente, no lugar à direita de H_i e no lugar à esquerda de H_i. Mais em geral, será nula toda a parcela de $K(n)$ que contenha $A_i^{'}A_i$ isto é $N(\cdots A_i^{'}A_i \cdots) = 0$.
- Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, temos $N(A_iA_{i+1}^{'}) = 0$, uma vez que não é possível sentar, simultaneamente, a mulher M_i à esquerda de H_i e a mulher M_{i+1} à direita de H_{i+1}, já que estes lugares coincidem.

Mais em geral, será nula toda a parcela de $K(n)$ que contenha $A_iA'_{i+1}$, isto é, $N(\cdots A_iA'_{i+1}\cdots) = 0$.

Além disso, serão também nulas todas as parcelas de $K(n)$ envolvendo mais de n conjuntos em que alguns são A'_i e alguns são A_i, pois os lugares disponíveis para sentar as mulheres são apenas n. De facto, estas parcelas traduziriam situações impossíveis como, por exemplo, sentar uma mulher, simultaneamente, à esquerda e à direita do seu marido ou sentar duas mulheres no mesmo lugar. Assim, em $K(n)$ as parcelas não nulas não poderão envolver mais do que n conjuntos. Para facilitar a exposição, vamos considerar

- $\mathcal{N}_1$ como a soma de todas as parcelas não nulas de $K(n)$ envolvendo apenas um dos conjuntos $A'_1, A_1, A'_2, A_2, \ldots, A'_n, A_n$;
- $\mathcal{N}_2$ como a soma de todas as parcelas não nulas de $K(n)$ envolvendo apenas dois dos conjuntos $A'_1, A_1, A'_2, A_2, \ldots, A'_n, A_n$;

e, de forma análoga, vamos considerar

- $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{N}_4, \ldots, \mathcal{N}_n$ como a soma de todas as parcelas não nulas de $K(n)$, envolvendo, respetivamente, três, quatro ... e n dos conjuntos $A'_1, A_1, A'_2, A_2, \ldots, A'_n, A_n$.

Vamos ver que, para cada $k = 1, 2, ..., n$, todas as parcelas de $\mathcal{N}_k$ são iguais entre si, bastando então determinar o número de parcelas de $\mathcal{N}_k$, bem como o valor de cada uma delas.

Comecemos com $\mathcal{N}_1$ e as parcelas do tipo $N(A_i)$. Cada uma das parcelas $N(A_i)$ corresponde a fixar um lugar para a mulher A_i, deixando disponíveis os restantes $n-1$ lugares para sentar as outras $n-1$ mulheres. Logo, teremos $N(A_i) = (n-1)!$.

Consideremos agora $\mathcal{N}_2$ e as parcelas do tipo $N(A_iA_j)$. Cada uma das parcelas $N(A_iA_j)$ corresponde a fixar os dois lugares para as mulheres A_i e A_j, deixando disponíveis os restantes $n-2$ lugares para sentar as outras $n-2$ mulheres. Logo, teremos $N(A_iA_j) = (n-2)!$.

De modo análogo, para $\mathcal{N}_3$ e para as parcelas do tipo $N(A_iA_jA_k)$. Teremos $N(A_iA_jA_k) = (n-3)!$.

E assim sucessivamente, resultando, mais em geral, que cada parcela integrante da soma $\mathcal{N}_k$ é dada por $(n-k)!$, para $k = 1, 2, ..., n$.

Resta agora determinar quantas são as parcelas em cada uma das somas $\mathcal{N}_k$, para $k = 1, 2, ..., n$. Vamos usar o 2º Lema de Kaplansky, Teorema 3.2.1.

Comecemos por observar que, dado $k = 1, 2, ..., n$, o número de parcelas de $\mathcal{N}_k$ é dado pelo número de maneiras de escolher k conjuntos não consecutivos a partir dos $2n$ conjuntos $A_1^{'}, A_1, A_2^{'}, A_2, \ldots, A_n^{'}, A_n$ dispostos de forma circular, ou seja, é dado por

$$C_k^{2n-k}\frac{2n}{2n-k}.$$

Assim, para cada $k = 1, 2, ..., n$, teremos:

$$\mathcal{N}_k = C_k^{2n-k}\frac{2n}{2n-k}\,(n-k)!$$

Consequentemente, substituindo na expressão (4.3), e tendo em conta as observações feitas sobre as parcelas nulas nesta expressão, obtemos

$$\begin{aligned} K(n) &= n! - C_1^{2n-1}\frac{2n}{2n-1}(n-1)! + C_2^{2n-2}\frac{2n}{2n-2}(n-2)! - \\ &\quad - \ldots + (-1)^n C_n^{2n-n}\frac{2n}{2n-n}(n-n)! \\ &= n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^n C_k^{2n-k}\frac{2n}{2n-k}(n-k)! \end{aligned}$$

ou seja,

$$K(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^{2n-k}\frac{2n}{2n-k}\,(n-k)! \qquad (4.4)$$

3. **Usando o Princípio da Multiplicação, Proposição 2.1.2**

Tendo em conta que a etapa 1. de sentar os homens à volta da mesa é independente da etapa 2. de sentar as mulheres alternadamente com os homes, concluímos que o número de formas, $L(n)$, de sentar os n homens e as respetivas n mulheres, em resposta ao Problema de Lucas, será então dado pelo Princípio da Multiplicação, bastando efetuar o produto de $P(n)$ por $K(n)$ e usar as expressões correspondentes obtidas em (4.2) e (4.4). Consequentemente,

$$\begin{aligned} L(n) &= P(n)K(n) \\ &= 2n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^{2n-k}\frac{2n}{2n-k}(n-k)! \end{aligned}$$

ficando, assim, concluída a demosntração do Lema 4.0.1.

□

(D) Aplicação do Problema de Lucas

Agora irá apresentar-se o número de maneiras de sentar 4 e 5 casais numa mesa circular, utilizando a fórmula (4.1) deduzida no Lema 4.0.1 para responder ao Problema de Lucas.

- Considere-se $n = 4$. Temos

$$\begin{aligned} L(4) &= 2\times 4!\sum_{k=0}^{4}(-1)^k C_k^{2\times 4-k}\frac{2\times 4}{2\times 4-k}(4-k)! \\ &= 96\ . \end{aligned}$$

  Logo, existem 96 formas distintas de distribuir 4 casais numa mesa circular de modo que os elementos de cada casal não fiquem lado a lado e de forma que homens e mulheres estejam sentados em lugares alternados.

- Considere-se agora $n = 5$. Temos

$$\begin{aligned} L(5) &= 2 \times 5! \sum_{k=0}^{5} (-1)^k C_k^{2\times 5-k} \frac{2 \times 5}{2 \times 5 - k} (5-k)! \\ &= 240 \times [120 - \frac{10}{9} \times \frac{9!}{1!8!} \times 4! + \frac{10}{8} \times \frac{8!}{2!6!} \times 3! - \\ &\quad - \frac{10}{7} \times \frac{7!}{3!4!} \times 2! + \frac{10}{6} \times \frac{6!}{4!2!} \times 1! - \frac{10}{5} \times \frac{5!}{5!0!} \times 0!] \\ &= 3120. \end{aligned}$$

  Logo, existem 3120 formas distintas de distribuir 5 casais numa mesa circular de modo que os elementos de cada casal não fiquem lado a lado e de forma que homens e mulheres estejam sentados em lugares alternados.

Analogamente, poderíamos obter o número de formas de dispor seis casais numa mesa circular sem que nenhum elemento de cada casal fique sentado junto do seu par e de forma que homens e mulheres fiquem sentados alternadamente. Recorrendo à fórmula (4.0.1), teríamos $L(6) = 115200$, como podemos verificar, para $n = 6$, ou consultando, por exemplo, o trabalho de Bogart K. e Doyle P. [3].

(E) Conclusão

Para terminar este capítulo, e em jeito de conclusão, apresenta-se, de seguida, a Tabela 4.1, na qual se resumem as respostas ao Problema de Lucas, indicando o número de maneiras de sentar os casais à volta de uma mesa circular, alternando homens e mulheres e sem que cada membro de cada casal fique em lugares consecutivos.

n, nº de casais	$L(n)$, resposta ao problema de Lucas
1	0
2	0
3	12
4	96
5	3120
6	115200
$\vdots$	$\vdots$
n	$2n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}\,C_k^{2n-k}(n-k)!$

Tabela 4.1: Número de formas de sentar n casais em torno de uma mesa circular, de modo que homens e mulheres fiquem alternados e os elementos de cada casal fiquem separados.

Capítulo 5

Exercícios a desenvolver em sala de aula

Este capítulo contém alguns exercícios de aplicação dos diversos teoremas e lemas apresentados neste trabalho. Escolhemos um conjunto de exercícios de fácil compreensão, para eventual discussão em sala de aula com alunos do 12º ano, com o intuito de complementar o programa de matemática, no seu capítulo de combinatória, que é lecionado no 12º ano.

Exemplo 5.0.1 (Exemplo de aplicação do Binómio de Newton)**.** *Mostrar que, dados n objectos distintos, há tantas maneiras de escolher um número par de objectos como escolher um número ímpar.*

Resolução: *Considerando o desenvolvimento de* $(1-1)^n$ *pela fórmula* (2.9) *do Binómio de Newton, podemos escrever*

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k$$

ou seja,

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

donde resulta

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots \tag{5.1}$$

A expressão no primeiro membro de (5.1) *indica o número total de maneiras de, entre os n objetos dados, escolher* 0 *ou* 2 *ou* 4 *ou etc, ou seja, indica o número total de maneiras de escolher um número par de objetos. Analogamente, a expressão no segundo membro de* (5.1) *indica o número total de maneiras de escolher um número ímpar de objetos. Assim, a igualdade* (5.1) *responde precisamente ao pretendido.*

Exemplo 5.0.2 (Exemplo de aplicação do Princípio de Inclusão-Exclusão)**.** *Quantos números se podem formar com os algarismos* $1, 2, 3, 4, 5, 6$*, sem que o 2^o algarismo seja o* 2*, o 4^o algarismo seja o* 4 *e o 6^o algarismo seja o* 6*?*

Resolução: *Consideremos as propriedades seguintes:*

• *p_1 é a propriedade em que o número formado tem o algarismo* 2 *na segunda posição;*

• *p_2 é a propriedade em que o número formado tem o algarismo* 4 *na quarta posição;*

• *p_3 é a propriedade em que o número formado tem o número* 6 *na sexta posição.*

A resposta à nossa questão será dada pelo número total de permutações dos algarismos dados que não verificam a propriedade p_1 nem a propriedade p_2, nem a propriedade p_3.

Pelo Princípio da inclusão-Exclusão, Teorema 2.4.1, aplicando a fórmula (2.26), obtemos:

$$\begin{aligned} N(\overline{p_1p_2p_3}) &= N-\Big[N(p_1)+N(p_2)+N(p_3)\Big] \\ &\quad +\Big[N(p_1p_2)+N(p_1p_3)+N(p_2p_3)\Big]-N\left(p_1p_2p_3\right), \end{aligned}$$

onde

$$N = A_6^6 = 720 \qquad N(p_i) = A_5^5 = 120$$

$$N(p_ip_j) = A_4^4 = 24 \qquad N(p_1p_2p_3) = A_3^3 = 6\,.$$

Então,

$$N(\overline{p_1p_2p_3}) = 720 - 3 \times 120 + 3 \times 24 - 6 = 426.$$

Existem assim 426 *números formados sem que o algarismo* 2 *esteja na 2ª posição nem o* 4 *esteja na 4ª posição nem o* 6 *esteja na 6ªa posição.*

Exemplo 5.0.3 (Exemplo de aplicação do 1º Lema de Kaplansky)**.** *A Carolina tem de fazer três exames nacionais em duas semanas: Matemática, Biologia e Português. De quantas formas se podem escolher os dias das provas, de modo que não haja exames em dias úteis consecutivos?*

Resolução: *Tendo em conta que os exames nacionais só poderão ser realizados num dia de semana (dia útil), temos então* 10 *dias possíveis para a realização de* 3 *exames, sendo que a sexta-feira da primeira semana e a segunda-feira da segunda semana são considerados dias consecutivos.*

Para que os exames não sejam realizados em dias úteis consecutivos, temos de determinar, no conjunto de 10 *dias úteis, um subconjunto de* 3 *dias, de forma que não existam dias consecutivos nesse subconjunto. Para tal, iremos utilizar o 1º Lema de Kaplansky, Teorema 3.1.1. De um conjunto de* 10 *elementos dispostos em linha, pretendemos escolher 3 sem que os mesmos sejam consecutivos. Assim:*

$$C_3^{10-3+1} = C_3^8 = \frac{8!}{3!5!} = 56, \tag{5.2}$$

e concluímos que a Carolina poderá fazer os 3 *exames de* 56 *formas distintas, de modo que não haja exames em dias úteis consecutivos.*

Exemplo 5.0.4 (Exemplo de aplicação do 2º Lema de Kaplansky)**.** *O Alexandre quer aprender a nadar e, para tal, deverá frequentar as aulas de natação três vezes por semana. No entanto, o Alexandre não pretende ter aulas em dias consecutivos para não se cansar. De quantas formas é que o*

Alexandre poderá distribuir as suas aulas pelos 7 *dias da semana?*

Resolução: *Tendo em conta que o Alexandre irá frequentar as aulas de natação durante um período de várias semanas consecutivas, é óbvio que o último dia de uma semana e o primeiro dia da semana seguinte são consecutivos. Vamos, assim, dispor a semana com os seus* 7 *dias segundo uma configuração circular de* 7 *elementos, o que nos remete para o 2º Lema de Kaplansky, Teorema 3.2.1. Tendo em conta a disposição circular de* 7 *elementos, pretende-se escolher* 3 *deles, sem que se hajam elementos consecutivos. Logo, a resposta ao problema será dada por*

$$C_3^{7-3}\frac{7}{7-3}=\frac{7}{4}C_3^4=\frac{7}{4}\frac{4!}{3!1!}=7, \tag{5.3}$$

e concluímos que são 7 *as formas de o Alexandre escolher os* 3 *dias não consecutivos da semana para as aulas de natação.*

Exemplo 5.0.5 (Exemplo para o Problema de Lucas). *A Alexandra fez anos e, para festejar, o seu marido levou-a a jantar ao seu restaurante preferido, tendo convidado mais 3 casais amigos. Para que todos possam conversar uns com os outros, preferiram sentar-se numa mesa redonda e acharam que o melhor seria ficarem sentados alternando homens e mulheres e que cada pessoa não tenha o seu par a seu lado! De quantas formas distintas poderão os amigos sentar-se na mesa redonda?*

Resolução:
Este é um exemplo do Problema de Lucas tratado no Lema 4.0.1. Pede-se o número de maneiras possíveis de sentar 4 *casais em torno de uma mesa circular, de forma que homens e mulheres fiquem em lugares alternados e sem que nenhum dos elementos do casal fique junto do seu par. Pelo Lema 4.0.1, com* $n=4$, *a fórmula da equação (4.1) dá*

$$\begin{aligned} L(4) &= 2\times 4!\sum_{k=0}^{4}(-1)^k C_k^{2\times 4-k}\frac{2\times 4}{2\times 4-k}(4-k)! \\ &= 96 \end{aligned}$$

Então, a Alexandra e o marido mais os 3 *casais amigos terão 96 formas distintas de se sentarem em torno de uma mesa circular, alternando homens e mulheres e sem que cada elemento de um casal fique junto do seu par.*

Capítulo 6

Conclusão

A área da combinatória sempre me despertou muita curiosidade e interesse, daí que a escolha tenha recaído num tema que envolvesse esse ramo da matemática. Foi um desafio muito interessante e motivador, que permitiu aprofundar os meus conhecimentos e desenvolver um trabalho de maior carácter científico ao fim de muitos anos como professora de ensino básico e secundário.

Neste trabalho, comecei por pesquisar como teria surgido o clássico Problema de Lucas e a cronologia da sua demonstração. O passo seguinte foi relembrar as noções básicas de contagem e de combinatória, para melhor entendimento dos lemas que conduzem à solução do problema.

Este trabalho poderá servir, futuramente, para uma palestra a alunos do 12º ano do ensino secundário, para que possam verificar a importância da combinatória, conteúdo por eles explorado, ou mesmo para uma palestra a professores de diversas escolas.

Bibliografia

[1] Cayley A., *A problem of arrangements*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, vol. 9, 1878.

[2] Ball W. W. R., Coxeter H. S. M., *Mathematical Recreations and Essays*, 13th ed., New York, Dover, 1987.

[3] Bogart K. P., Doyle P. G., *Non-sexist solution of the ménage problem*, American Mathematical Monthly, 1986.

[4] Benjamin Arthur T., Quinn Jennifer J., *Recounting Fibonacci and Lucas Identities, in The College mathematics journal, vol.30, No.5*, Mathematical Association of America, 1999.

[5] Kaplansky I., *Solution of the "problème des ménages"*, Bull. Amer. Math. Soc., 1943.

[6] Kaplansky I., Riordan J., *The problème des ménages, in "Scripta Mathematica"*, 12, 1946.

[7] Lima E. L., *Curso de Análise*, IMPA, Rio de Janeiro, 1992.

[8] Lucas E., *Théorie des nombres*, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1891.

[9] Lucas E., *Récréations Mathématiques*, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1893.

[10] Montmort, P. R., *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Premiére Edition, Jacques Quillau, Paris, published anonymously, 1708.

[11] Montmort, P. R., *Essay d'analyse sur les Jeux de Hazard*, Seconde Edition, Revûe et augmentée de plusieurs Lettre, Quillau, Paris, 1713. Reprinted 1714. Published anonymously. Reprinted by Chelsea, New York, 1980.

[12] Pereira J. M. S., *Tópicos de Combinatória*, Editora Luz da Vida, 2006.

[13] Riordan J., *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley & Sons, Inc. Canada, 1958.

[14] Santos L., *O problema de Lucas*, Monografia em Matemática da UFMG, Belo Horizonte, 2011.

[15] Touchard J., *Sur un problème de permutations*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1934.

[16] Wikipedia, consultado em julho de 2016, dezembro de 2016, julho de 2017 e agosto de 2017,

`https://pt.wikipedia.org/wiki/`

[17] A chronicle of mathematical people, consultado em julho de 2016 e agosto de 2017,
`https://www.robertnowlan.com/pdfs/Lucas,%20Edouard.pdf`

[18] Portraying and remembering Irving Kaplansky, consultado em agosto de 2017,
`http://www.msri.org/attachments/specialevents/270/Kap-BassPresentation_MSRI_022307_fin.pdf`

[19] Encyclopædia Britannica, consultado em agosto de 2017,
`http://www.britannica.com/`

[20] Biografias Universidade St. Andrews, consultado em agosto de 2017,
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BiogIndex.html`

[21] The tower of Hanoi, por Paul K. Stockmeyer, consultado em agosto de 2017,
`http://www.cs.wm.edu/~pkstoc/toh.html`

[22] "In memorium", Univeristy of California, consultado em agosto de 2017,
http://senate.universityofcalifornia.edu/_files/inmemoriam/html/irvingkaplansky.html